

# Das zeitliche Abklingen der Energiespektren in der homogenen isotropen Turbulenz als Anfangswertproblem

Von K. MEETZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 11 a, 832—847 [1956]; eingegangen am 8. August 1956)

Die von HEISENBERG aufgestellte Integrodifferentialgleichung für die mittlere spektrale Energiedichte  $F(k, t)$  in einem homogen-isotrop-turbulenten Strömungsfeld wird als parabolisches Anfangswertproblem für die vier Werte des Parameters  $\kappa$  ( $\kappa=0$ ;  $\kappa=0,47$ ;  $\kappa=0,75$ ;  $\kappa=1,4$ ) integriert. Die Anfangsverteilung  $F(k, t_0)$  wird aus Messungen von STEWART und TOWNSEND ermittelt. Der Vergleich der berechneten Abklinggesetze der mittleren Gesamtenergiedichte  $E(t)$  für die verschiedenen  $\kappa$ -Werte mit dem experimentell ermittelten Gesetz ermöglicht eine  $\kappa$ -Bestimmung aus dem Abklingvorgang der Energie, während bisher  $\kappa$  aus der spektralen Verteilung der Energie ermittelt wurde. Es ergibt sich:  $\kappa=0,75$ . Die spektrale Energiedichte  $F(k, t)$  gleicht sich mit zunehmender Zeit der ähnlichen Lösung an, woraus entnommen werden kann, daß der Austauschprozeß einen Gleichgewichtszustand anstrebt.

In einer weiteren Arbeit, die gleich anschließend abgedruckt ist, wird der Einfluß des Parameters  $\kappa$  auf den Abklingprozeß der Geschwindigkeits- und Druckkorrelationen untersucht, so daß eine umfangreiche Überprüfung des HEISENBERGSchen Ansatzes an den vorliegenden experimentellen Daten möglich wird.

## I. Einführung und Fragestellung

Die statistische Theorie der Turbulenz basiert auf der Annahme, daß das turbulente Strömungsfeld durch eine dreidimensionale Zufallsvektorfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  beschrieben werden kann. Die Unbestimmtheit, die zu einer derartigen Annahme Anlaß gibt, ist eine Unbestimmtheit der Anfangswerte  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$ . Das Auftreten einer bestimmten Anfangsverteilung  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$  bedeutet das Eintreten eines Ereignisses im Sinne der Statistik. Sind nämlich einmal bestimmte Anfangswerte bezüglich  $t$  und Randwerte bezüglich  $x$  vorgeschrieben, so ergibt sich die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes für  $t \geq t_0$  aus den NAVIER-STOKESSchen Differentialgleichungen und der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1 a)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1 b)$$

Zur Belebung der Anschauung mag man an das folgende Beispiel denken: In einem großen Topf, der mit einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt ist, werde zur Zeit  $t_0$  durch einen Rührprozeß eine beliebig geartete Anfangsverteilung  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$  erzeugt. Sich selbst überlassen, klingt dann das Strömungsfeld gemäß den obigen Differentialgleichungen ab. Da keinerlei Hoffnung besteht, zuverlässige Informationen über die durch einen bestimmten Rührprozeß erzeugte Anfangsverteilung zu erhalten, muß diese

als unbestimmt angesehen werden. So erscheint nur die statistische Betrachtungsweise möglich: Jede dreidimensionale Vektorfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , die quellenfrei ist, ist eine mögliche Anfangsverteilung. Im Falle des Topfes treten natürlich Randbedingungen bezüglich  $x$  hinzu, von denen wir aber im allgemeinen absehen wollen, da wir ein unendlich ausgedehntes Strömungsfeld zugrundelegen. Die Gesamtheit dieser Funktionen bildet einen linearen Funktionsraum  $\Omega_v$ , in dem nun eine Maßfunktion  $P(S)$  zu definieren ist mit  $P(\Omega) = 1$ , die jeder Teilmenge  $S \in \Omega_v$  eine positive Zahl  $p$  zuordnet.  $p$  kann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, daß das Element  $\mathbf{v}$  zur Teilmenge  $S$  gehört. Man könnte etwa die aus  $N$  Rührversuchen ermittelten relativen Häufigkeiten zur Darstellung von  $P(S)$  verwenden. Die Grundaufgabe einer statistischen Theorie der Turbulenz, die in der Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P[\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]$  für  $t \geq t_0$  besteht, zerfällt also in zwei Teile:

1. Statistische Beschreibung der Anfangswerte  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$  durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(S)$  in  $\Omega_v$ .
2. Lösung der NAVIER-STOKESSchen Differentialgleichungen (1) für jedes  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$  aus  $\Omega_v$ .

Einer praktischen Behandlung besser zugänglich erscheint folgende Fassung der Aufgabe: Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P[\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]$  werde durch die Gesamtheit ihrer Mittelwerte be-



schrieben. Die Mittelwerte genügen gewissen Differentialgleichungen, die man aus den NAVIER-STOKESschen Gln. (1) gewinnt. Die Gesamtheit dieser Gleichungen ist dann nach Vorgabe von Anfangswerten zu lösen.

Nach einem allgemeinen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsfunktion  $v(r, t)$  bekannt, wenn die Verteilung eines Satzes von  $n$  Zufallsvektoren  $v_1, \dots, v_n$ , die in  $n$  Punkten  $(r_1, t_1), \dots, (r_n, t_n)$  genommen sind, für jedes  $n$  und jede Kombination von  $n$  Punkten im  $(r, t)$ -Raum bekannt ist. Man hat sich also bei der Lösung der gestellten Aufgabe zunächst der Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P(v_1, \dots, v_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zuzuwenden, aus denen dann die Verteilung  $P[v(r, t)]$  aufgebaut werden kann. Die einfachste dieser Verteilungen, die für die Theorie von Bedeutung ist, ist  $P(v, v')$ , wo  $v$  in  $r_0$  und  $v'$  in  $r_0 + r$  zur gleichen Zeit  $t$  genommen sind, denn sie ist die einfachste Verteilung, in die der Zusammenhang der Strömungsverhältnisse in verschiedenen Punkten des Feldes eingeht. Wie schon oben bemerkt, ist es zweckmäßig, die Verteilung durch ihre Mittelwerte darzustellen, die natürlich, durch den Vektorcharakter des Feldes bedingt, Tensoren sind. Der einfachste der zu  $P(v, v')$  gehörigen Mittelwerttensoren ist der Zweifachkorrelationstensor:

$$\begin{aligned} u_i u_j' &= u_i(r_0, t) u_j(r_0 + r, t) \\ &= \int \int u_i u_j' P(db, db'), \quad v = \{u_1, u_2, u_3\}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Mittelwerte werden in Zukunft immer durch Überstreichen gekennzeichnet und sind im Sinne von (2) zu verstehen.)

Der Anstoß zur Entwicklung einer statistischen Theorie der Turbulenz ging von TAYLOR aus. In seiner grundlegenden Arbeit<sup>1</sup> führte er die Geschwindigkeitskorrelation  $\overline{uu'}$  zwischen gleichgerichteten Geschwindigkeitskomponenten  $u$  in verschiedenen Punkten des Strömungsfeldes ein. Bei der Untersuchung dieser Korrelationsfunktion zeigte sich, daß die analytische Behandlung wesentlich erleichtert wird durch folgende Annahmen: 1. Das turbulente Strömungsfeld soll statistisch homogen, d. h. die Verteilung  $P$  soll invariant sein gegen eine beliebige räumliche Translation  $r \rightarrow r + a$ . 2. Das Strömungsfeld soll statistisch isotrop, d. h. die Verteilung  $P$

soll eine Invariante der vollen Drehgruppe sein. Unter diesen Voraussetzungen hängt die Geschwindigkeitskorrelation  $\overline{uu'}$  nur vom räumlichen Abstand der beiden Punkte und der Zeit ab. In einer weiteren Arbeit<sup>2</sup> konnte TAYLOR 1937 zeigen, daß die durch ein Gitter im Luftstrom des Windkanals erzeugte Turbulenz annähernd homogen und isotrop ist. Der weitere Ausbau der Theorie vollzog sich konsequenterweise im Sinne des oben angedeuteten Programms. v. KÁRMÁN und HOWARTH erkannten 1938, daß der zweistufige und der dreistufige Mittelwertensor von  $P(v, v')$  im Falle des statistisch homogenen und isotropen Strömungsfeldes durch je eine Skalarfunktion definiert werden. In der gleichen Arbeit<sup>3</sup> stellten sie die einfachste der Mittelwertdifferentialgleichungen, nämlich die für die Zweifachgeschwindigkeitskorrelation, auf und behandelten sie. Jedoch zeigte sich hier gleich eine große Schwierigkeit: Der nichtlineare Charakter der Gln. (1) führt dazu, daß in der aus (1) für (2) abgeleiteten Differentialgleichung auch die Dreifachgeschwindigkeitskorrelation auftritt. Allgemein tritt in der Differentialgleichung für den Korrelationstensor  $n$ -ter Stufe von  $P(v, v')$  auch der Korrelationstensor  $(n+1)$ -ter Stufe auf, so daß ohne Information über diesen ein endlicher Satz von derartigen Korrelationsgleichungen unterbestimmt ist. Es sind einige Versuche unternommen worden, der oben geschilderten Schwierigkeit dadurch zu entgehen, daß man für die  $(n+1)$ -fache Korrelation einen Ansatz machte, der sie auf Korrelationen niedrigerer Stufe zurückführt. So bedingt die Annahme, daß  $P(v, v')$  eine Normalverteilung ist, die Zurückführung der Vierfachkorrelation auf die Zweifachkorrelation. Damit hat man zwei Gleichungen für Zwei- und Dreifachkorrelation. Dieses Gleichungssystem wurde zuerst von MILLIONSHTCHIKOV<sup>4</sup> behandelt. Eine ausführlichere Analyse lieferten 1954 PROUDMAN und REID<sup>5</sup>. Es besteht jedoch wenig Aussicht, auf diesem Wege der Lösung des Problems näher zu kommen, da es wegen der rein mathematischen Bedeutung der Korrelationen nicht möglich ist, auf Grund physikalischer Modellvorstellungen zu plausiblen Ansätzen zu gelangen.

Die historische Entwicklung nahm darum einen anderen Weg. Geht man von (2) zur FOURIER-Trans-

<sup>1</sup> G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **151**, 421 [1935].

<sup>2</sup> G. I. TAYLOR, J. Aero. Sci. **4**, 311 [1937].

<sup>3</sup> TH. VON KÁRMÁN u. H. HOWARTH, Proc. Roy. Soc., Lond. A **164**, 192 [1938].

<sup>4</sup> M. MILLIONSHTCHIKOV, C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. **32**, 615 [1941].

<sup>5</sup> I. PROUDMAN u. W. H. REID, Phil. Trans. A, **247**, 63 [1954].

formierten über, so kann diese in einen einfachen Zusammenhang mit einer physikalischen Größe gebracht werden: der mittleren spektralen Energiedichte  $F(k, t)$ . Der Begriff der spektralen Verteilung der mittleren kinetischen Energiedichte eines turbulenten Strömungsfeldes geht wiederum auf TAYLOR zurück. Der Zusammenhang der Energieverteilung mit der Zweifachkorrelation geht aus den folgenden Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j'} &= \int A_{ij}(\mathbf{f}) e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r})} d\tau(\mathbf{f}), \\ \frac{1}{2} \overline{v^2(t)} &= \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} \int A_{ii}(\mathbf{f}) d\tau(\mathbf{f}) \\ &= \int_0^\infty dk \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} d\Omega A_{ii}(\mathbf{f}) = \int_0^\infty F(k, t) dk; \\ F(k, t) &= \int_{\Omega_k} \frac{1}{2} A_{ii}(\mathbf{f}) d\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

[ $d\tau(\mathbf{f})$  Volumenelement im  $k$ -Raum,  $\Omega_k$  Oberfläche einer Kugel vom Radius  $k$ .] FOURIER-Transformation der v. KÁRMÁNSchen Differentialgleichung [s. Anm.<sup>3</sup>] und anschließende Integration über eine Kugel vom Radius  $k$  im  $k$ -Raum führt dann zu der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx = -H(k, t) - 2\nu \int_0^k x^2 F(x, t) dx. \quad (4)$$

$H(k, t)$  ist im wesentlichen ein Integral über die FOURIER-Transformierte der Dreifachkorrelation. Gl. (4) tritt in der Sprache der FOURIER-Transformierten an die Stelle der v. KÁRMÁNSchen Differentialgleichung für die Zweifachkorrelation. Sie kann jedoch leichter physikalisch gedeutet werden. Interpretiert man  $1/k$  als Größe der im turbulenten Strömungsfeld auftretenden Wirbel, so steht auf der linken Seite der Gl. (4) die Änderung der mittleren kinetischen Energie pro Massen- und Volumeneinheit aller Wirbel der Größe  $\geq 1/k$ . Sie wird einerseits durch den Einfluß der molekularen Zähigkeit bewirkt, wie der zweite Term auf der rechten Seite von (4) anzeigt, andererseits fließt Energie aus dem Bereich  $\geq 1/k$  ab zu den Wirbeln einer kleineren Größenordnung. Dieser Austauschprozeß, der durch die Einwirkung der nichtlinearen Trägheitsglieder be-

wirkt wird, kann zum Gegenstand physikalischer Überlegungen gemacht werden, die die noch fehlende Beziehung liefern, die (4) zu einer Bestimmungsgleichung für  $F(k, t)$  macht. Solche Überlegungen wurden 1948 von v. WEIZSÄCKER<sup>6</sup> und HEISENBERG<sup>7,8</sup> angestellt. Der Gedanke war, den Trägheitstransport auf die Einwirkung einer scheinbaren kinematischen Zähigkeit zurückzuführen, die nicht durch die molekulare Struktur der Flüssigkeit, sondern durch die kleinen Wirbelkomponenten  $\leq 1/k$  verursacht wird. Dies führt zu folgendem Ansatz für  $H(k, t)$ :

$$H(k, t) = 2 \sigma(k, t) \int_0^k x^2 F(x, t) dx. \quad (5)$$

Dimensionsbetrachtungen ergeben für die Wirbelzähigkeit  $\sigma(k, t)$ :

$$\sigma(k, t) = \kappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx, \quad \kappa = \text{Konstante}. \quad (6)$$

Setzt man das in (4) ein, so ist eine Bestimmungsgleichung für  $F(k, t)$  gegeben. Ein allgemeinerer Ansatz für  $H(k, t)$  in dem (5) und (6) als Spezialfall enthalten sind, wurde ebenfalls 1948 von v. KÁRMÁN<sup>9</sup> angegeben, jedoch fehlt ihm die Unterstützung durch ein anschauliches Modell des Transportvorganges. Die Vermutung liegt nahe, daß im kurzwelligen Teil des Spektrums  $k \rightarrow \infty$  sich ein Gleichgewicht einstellt zwischen der Einwirkung der Zähigkeit, die kinetische Energie in thermische umsetzt, und der Nachlieferung kinetischer Energie aus dem Bereich kleinerer Wellenzahlen. Überlegungen in dieser Richtung wurden 1941 von KOLMOGOROV<sup>10</sup> angestellt und später, unabhängig voneinander, von ONSAGER<sup>11</sup> wie auch von v. WEIZSÄCKER<sup>6</sup> und HEISENBERG<sup>7,8</sup> aufgenommen. Sie führen zu der Annahme, daß  $F(k, t)$  im Gleichgewichtsbereich die folgende Form hat:

$$F(k, t) = V^2 l \Phi(kl) \quad (7)$$

( $V$  = charakteristische Geschwindigkeit,  $l$  = charakteristische Länge).

Führt man  $kl$  als unabhängige Veränderliche in (4) ein, so ergibt sich eine Integrodifferentialgleichung für die Funktion  $\Phi(kl)$ . Zur numerischen

<sup>6</sup> C. F. VON WEIZSÄCKER, Z. Phys. **124**, 614 [1948].

<sup>7</sup> W. HEISENBERG, Z. Phys. **124**, 628 [1948].

<sup>8</sup> W. HEISENBERG, Proc. Roy. Soc., Lond. A **195**, 402 [1948].

<sup>9</sup> TH. VON KÁRMÁN, C. R. Acad. Sci., Paris **226**, 2108 [1948].

<sup>10</sup> A. N. KOLMOGOROV, C. R. Acad. Sci. URSS **30**, 301 [1941].

<sup>11</sup> L. ONSAGER, Phys. Rev. **68**, 286 [1945].

Integration dieser Gleichung hat CHANDRASEKHAR<sup>12</sup> 1949 ein Verfahren entwickelt und nach diesem auch eine ganze Reihe von Lösungen berechnet. Durch einen solchen Ähnlichkeitsansatz geht natürlich der Anfangswertcharakter von (4) verloren. Es ist nicht mehr möglich, Anfangswerte  $F(k, t_0)$  zu einem Zeitpunkt  $t_0$  vorzugeben. Ein Ähnlichkeitsansatz der Form (7) bedeutet also Entkoppelung von den Anfangswerten  $F(k, t_0)$ , was physikalisch durch Einstellung eines Gleichgewichtes zu erklären ist. Die Existenz eines Gleichgewichtes aber ist einerseits an gewisse Postulate gebunden, andererseits auf einen Teilbereich des Spektrums  $k \geq k_0$  beschränkt, wo  $k_0$  im wesentlichen von der Re-Zahl abhängt. Diese starken Einschränkungen lassen die ähnlichen Lösungen vom Typus (7) ungeeignet erscheinen, um den HEISENBERGSchen Ansatz zu überprüfen. Gerade diese Aufgabe aber ist nun vordringlich. Es muß untersucht werden, inwieweit Ergebnisse, die mit Hilfe des HEISENBERGSchen Ansatzes gewonnen sind, mit experimentellen Daten übereinstimmen. Einen ersten Beitrag hierzu hat 1951 PROUDMAN<sup>13</sup> geliefert, allerdings auf der Basis der Ähnlichkeitshypothese. Soll aber das Ergebnis eines solchen Vergleichs ein Kriterium für die Güte des HEISENBERGSchen Ansatzes sein, so muß auf jede einschränkende Voraussetzung verzichtet werden, was auf eine allgemeine Lösung des parabolischen Anfangswertproblems der Gl. (4) für  $F(k, t)$  hinausläuft. Dieser Gedanke wurde zuerst von TOLLMIE<sup>14</sup> aufgegriffen. Er entwickelte ein numerisches Verfahren, das die Lösung des Anfangswertproblems gestattet und gelangte zu einer prinzipiellen Übereinstimmung mit dem experimentellen Tatbestand.

STEWART und TOWNSEND<sup>15</sup> wie auch BATCHELOR und TOWNSEND<sup>16</sup> haben 1951 bzw. 1948 umfangreiche Messungen durchgeführt, die sich mit dem zeitlichen Abklingvorgang der wesentlichen Mittelwerte von  $P(v, v')$  befassen. In Fortführung der Untersuchung von TOLLMIE sollen nun die Mittelwerte aus dem HEISENBERGSchen Ansatz berechnet und mit diesen Messungen verglichen werden.

Es wird zunächst der Abklingvorgang der Energiespektren nach dem HEISENBERGSchen Ansatz unter-

sucht, während in einer weiteren Arbeit, die in Kürze an gleicher Stelle erscheinen wird, das Abklingen der Geschwindigkeits- und Druckkorrelationen behandelt werden wird.

Im Abschnitt II wird die zu den Experimenten von STEWART und TOWNSEND gehörende ähnliche Lösung der HEISENBERGSchen Integrodifferentialgleichung berechnet. Abschnitt III bringt die Formulierung des Anfangswertproblems und Abschnitt IV die Berechnung der Anfangsverteilung  $F(k, t_0)$  aus Geschwindigkeitskorrelationsmessungen. Abschnitt V enthält das numerische Integrationsverfahren, dessen Resultate in den beiden letzten Abschnitten VI und VII bezüglich des Verhaltens der Gesamtenergie und der Spektren diskutiert werden.

## II. Ähnliche Lösungen der Heisenbergschen Gleichung

Der Gedanke liegt nahe, daß sich ein statistisch isotropes und homogenes Strömungsfeld im Laufe der Zeit einem asymptotischen Zustand nähert, der unabhängig von den Bedingungen ist, unter denen es erzeugt wurde. Das bedeutet eine Entkopplung von den zufälligen Anfangsbedingungen, womit im Sinne der Statistik ein Gleichgewichtszustand gegeben ist. Dieser Gleichgewichtszustand wird durch drei äußere Parameter beschrieben: Eine charakteristische Geschwindigkeit  $V(t)$ , eine charakteristische Länge  $l(t)$  und die kinematische Zähigkeit  $\nu$ . Auf diese Parameter sind alle das Strömungsfeld beschreibenden Größen zu beziehen. Für das Energiespektrum  $F(k, t)$  ist daher anzusetzen:

$$F(k, t) = V^2(t) l(t) \Phi(k l(t); R(t)), \quad (8)$$

wobei  $R(t) = V(t) l(t) / \nu$  die mit den charakteristischen Größen gebildete Re-Zahl ist. Mit diesem Ansatz gehen wir in die HEISENBERGSche Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx \\ + \left( \nu \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx + \nu \right) \cdot \int_0^k 2 x^2 F(x, t) dx = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>12</sup> S. CHANDRASEKHAR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **200**, 20 [1949].

<sup>13</sup> I. PROUDMAN, Proc. Cambr. Phil. Soc. **47**, 158 [1951].

<sup>14</sup> W. TOLLMIE, General lecture VIII. International Congress on Theoretical and Applied Mechanics (Istanbul 1952): „Über Schwingungen in laminaren Strömungen und die Theorie der Turbulenz.“ Ausführliche Darstellung in: Abnahme der Windkanalturbulenz nach dem HEISENBERGSchen

Austauschansatz als Anfangswertproblem. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Dresden **2**, 433 [1953].

<sup>15</sup> R. W. STEWART u. A. A. TOWNSEND, Phil. Trans. A **243**, 359 [1951].

<sup>16</sup> G. K. BATCHELOR u. A. A. TOWNSEND, Proc. Roy. Soc., Lond. A **193**, 539 [1948].



ein. Prinzipiell kann man nun  $V$  und  $l$  beliebig wählen, jedoch wollen wir im folgenden setzen:

$$V^2(t) = \overline{u^2}(t) = \frac{2}{3} \int_0^\infty F(k, t) dk;$$

$$l^2(t) = \frac{\lambda^2(t)}{10} = \frac{\int_0^\infty F(k, t) dk}{\int_0^\infty 2 k^2 F(k, t) dk}, \quad (10)$$

wo  $\overline{u^2}$  das mittlere Quadrat einer Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist und  $\lambda$  die von TAYLOR<sup>17</sup> eingeführte Dissipationslänge bedeutet. Dadurch werden der Funktion  $\Phi$  zwei zusätzliche Integralbedingungen auferlegt:

$$\int_0^\infty \Phi(\chi) d\chi = \int_0^\infty 2 \chi^2 \Phi(\chi) d\chi = \frac{3}{2}; \quad \chi = kl. \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingungen erhält man mit dem Ansatz (8) aus (9)

$$\frac{1}{2} \Phi \chi - \int_0^\chi \Phi d\chi' + \left( \kappa R \int_\chi^\infty \sqrt{\frac{\Phi}{\chi'^3}} d\chi' + 1 \right) \cdot \int_0^\chi 2 \chi'^2 \Phi d\chi' + \left\{ R \frac{\partial}{\partial R} \int_0^\chi \Phi d\chi' + \Phi \chi + \frac{4}{3} \Phi \chi R \frac{d}{dR} \int_0^\infty \chi^2 \Phi d\chi \right\} \frac{dR}{dt} = 0. \quad (12)$$

Nun ist durch zahlreiche Experimente immer wieder bestätigt worden, daß  $R_i^2 = \overline{u^2} \lambda^2 / \nu^2 = 10 R^2 = \text{const}$  gilt im Anfangsstadium des zeitlichen Abklingvorgangs. ROTTA<sup>18</sup> verzichtet auf diese Forderung und behandelt die Gl. (12). Das bietet den Vorteil, daß er durch geeignete Wahl eines zusätzlichen Parameters, der durch das Zusatzglied mit  $dR/dt$  in (12) asymptotisch definiert wird, eine ähnliche Lösung erhält, die  $\sim \chi^4$  für  $\chi \rightarrow 0$ , also mit dem Gesetz  $F \sim k^4$  für  $k \rightarrow 0$  übereinstimmt, das BATCHELOR<sup>19</sup> aus der Kontinuitätsgleichung herleitete. Streicht man dagegen das Glied mit  $dR/dt$ , so sind die Lösungen der Restgleichung  $\sim \chi$  für  $\chi \rightarrow 0$ , wie wir noch sehen werden. Das ist sicherlich falsch, aber andererseits doch nicht allzu bedenklich, da man nicht erwarten darf, daß die ähnliche Lösung sich bis zu sehr kleinen  $k$  erstreckt. Denn hier gilt nach BATCHELOR<sup>19</sup>:

$$k \rightarrow 0 \quad F(k, t) = \frac{A}{3\pi} k^4 + \dots, \quad (13)$$

wo  $A$  die LOITSJANSKISCHE Invariante ist, die nicht von der Zeit abhängt. Der Energiegehalt der großen Wirbel ( $k \rightarrow 0$ ) ist also konstant bis zu einem Zeitpunkt, an dem auch die Energie der großen Wirbel durch den Einfluß der Reibung in Wärme umgewandelt wird. Er nimmt nicht an dem Austauschvorgang teil, der zum postulierten Gleichgewicht führt, kann daher auch nicht in dessen Gültigkeitsbereich einbezogen werden. Aus diesen Gründen erscheint es vorteilhafter, auf das richtige asymptotische Verhalten der ähnlichen Lösung für  $k \rightarrow 0$  zu verzichten und statt dessen  $dR/dt = 0$  zu fordern.

Mit  $dR/dt = 0$  bleibt von (12) noch:

$$0 = \frac{1}{2} \Phi \chi - \int_0^\chi \Phi d\chi' + \left( \kappa R \int_\chi^\infty \sqrt{\frac{\Phi}{\chi'^3}} d\chi' + 1 \right) \cdot \int_0^\chi 2 \chi'^2 \Phi d\chi'. \quad (14)$$

Aus  $dR/dt = 0$  folgt nun für den Abklingvorgang hinter einem quadratischen Maschengitter:

$$a) \lambda^2 = \frac{10 r}{U} (x - x_0), \quad b) \frac{U^2}{u^2} = D \left( \frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right), \quad (15)$$

wo  $U$  die gleichförmige Geschwindigkeit des Stromes durch das Gitter,  $x = Ut$ ,  $M$  die Maschenweite des Gitters und  $D$  eine Konstante ist. Diese beiden Gesetze beschreiben vortrefflich das Verhalten der Dissipationslänge  $\lambda$  und der reziproken Gesamtenergie im Anfangsstadium des Zerfalls.  $x_0$  ist dabei der Ort, an dem die Gesamtenergie unendlich wäre.

Wir wollen nun eine Transformation von (14) ausführen, und zwar

$$\chi = z; \quad \psi = \kappa^2 R^2 \Phi.$$

Dann wird aus (14):

$$0 = \frac{1}{2} z \psi - \int_0^z \psi dy + \left( \int_z^\infty \sqrt{\frac{\psi}{y^3}} dy + 1 \right) \int_0^z 2 y^2 \psi dy. \quad (16)$$

<sup>17</sup> G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **151**, 421 [1935].

<sup>18</sup> J. ROTTA, J. Aero. Sci. **20**, 769 [1953].

<sup>19</sup> G. K. BATCHELOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **195**, 513 [1949].

Dazu treten die aus (11) folgenden Nebenbedingungen:

$$\int_0^\infty \psi dz = 1,5 \kappa^2 R^2; \quad \int_0^\infty \psi dz = \int_0^\infty 2 z^2 \psi dz.$$

Die zweite der obigen Bedingungen wird aber durch eine Lösung von (16) von selbst erfüllt, wie aus (16) für  $z \rightarrow \infty$  folgt, da  $\psi \sim z^{-7}$  für  $z \rightarrow \infty$  (s. u.). Also bleibt nur noch die erste zu erfüllen. Nun ist unter Berücksichtigung von (15)  $R^2 = R_M/D$ . Somit lautet die Normierungsbedingung für  $\psi(z)$ :

$$\int_0^\infty \psi dz = 1,5 \frac{\kappa^2 R_M}{D} = A. \quad (17)$$

Die Aufgabe heißt also nun, Gl. (16) mit der Nebenbedingung (17) zu lösen. Statt der Anfangsverteilung sind hier nur noch die Konstanten  $R_M$  und  $D$  von außen aufgeprägt. In unserem Fall (Messungen von TOWNSEND und STEWART<sup>15</sup>) ist  $R_M = 5300$ ,  $D = 132$ . Die Angaben bezüglich  $D$  schwanken etwas. Für  $\kappa$  gibt PROUDMAN<sup>13</sup> den Wert  $\kappa = 0,45 \pm 0,05$  an, der aus dem Vergleich von ähnlichen Lösungen mit Experimenten ermittelt wurde. Wir setzen  $\kappa = 0,47$ .

Die Lösungen der Gl. (16) stellen eine einparametrische Schar von Funktionen dar, die lediglich von der unabhängigen Veränderlichen  $z$  abhängen. Da sich die Funktionen  $\psi$  in der Auftragung  $\psi$  über  $z$  nicht mit der Zeit ändern, nennt man sie wohl auch „selbsterhaltend“. Lösungen von (15) wurden zuerst von CHANDRASEKHAR<sup>12</sup> berechnet, der allerdings seine Lösungen anders normiert hat. Jedoch soll hier ein anderes Verfahren zur Lösung von (16) benutzt werden als das von CHANDRASEKHAR, der (16) auf eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung transformiert und diese numerisch für verschiedene Parameterwerte integriert hat.

Zunächst wollen wir das asymptotische Verhalten von  $\psi(z)$  für  $z \rightarrow 0$  und  $z \rightarrow \infty$  studieren. Bei kleinen  $z$  kann man das Glied

$$\left( \int_z^\infty \sqrt{\frac{\psi}{y^3}} dy + 1 \right) \int_0^z 2 y^2 \psi dy$$

streichen, da es von 3. Ordnung ist. Es bleibt:

$$\frac{1}{2} z \psi(z) - \int_0^z \psi(y) dy = 0.$$

Setzt man  $\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  ein, so sieht man, daß  $a_0 = 0$  sein muß, während  $a_1$  beliebig ist und durch die Normierung festgelegt wird. Für  $z \rightarrow 0$  verhalten sich also die Lösungen wie  $a_1 z$ . Das asymptotische Verhalten für große  $z$  ergibt sich aus (16), wenn man

einige Vernachlässigungen vornimmt. Zunächst soll gelten:

$$\int_z^\infty \psi(y) dy \ll \int_0^\infty \psi(y) dy, \quad \text{also} \quad \int_0^z \psi(y) dy = A.$$

Ferner wird das Glied  $\left(\frac{1}{2} z \psi\right)$  vernachlässigt, da ja  $\psi$  im Unendlichen verschwinden muß. Die Restgleichung

$$A = \left( \int_z^\infty \sqrt{\frac{\psi(y)}{y^3}} dy + 1 \right) \int_0^z 2 y^2 \psi(y) dy$$

$$\text{hat die Lösung} \quad \psi(z) = \frac{A^2}{4 z^7 (1 + 3 A/8 z^4)^{4/3}}. \quad (18)$$

Dies gilt also in einem  $z$ -Bereich, in dem

$$\frac{1}{2} z \psi + \int_z^\infty \psi(y) dy \ll A$$

erfüllt ist. Für  $z \gg z_A = (3 A/8)^{1/4}$  reduziert sich (18) auf das Potenzgesetz  $\psi(z) = A^2/4 z^7$ .

Zur Lösung der Gl. (16) kann man nun folgendermaßen vorgehen: Man konstruiert sich eine Ausgangsnäherung  $\psi_0(z)$ , die das richtige asymptotische Verhalten zeigt und die Integralbedingungen erfüllt:

$$\int_0^\infty \psi_0(y) dy = A; \quad \int_0^\infty 2 y^2 \psi_0(y) dy = A.$$

Mit dieser Funktion  $\psi$  bildet man die nullte Näherung des Integralsausdruckes:

$$S_0(z) = \int_z^\infty \sqrt{\frac{\psi_0(y)}{y^3}} dy + 1$$

und integriert die lineare Gleichung

$$\frac{1}{2} z \psi_1 - \int_0^z \psi_1 dy + S_0(z) \int_0^z 2 y^2 \psi_1 dy = 0$$

nach dem ADAMSSchen Verfahren mit iterativer Verbesserung. Die Iterationen werden nach dem Schema:

$$\frac{1}{2} z \psi_n - \int_0^z \psi_n dy + S_{n-1} \int_0^z 2 y^2 \psi_n dy = 0$$

fortgesetzt. Der Differentialquotient  $d\psi_n/dz|_0$  kann zunächst beliebig vorgegeben werden. Anschließend wird jedoch die Näherungslösung richtig normiert:

$$\int_0^\infty \psi_n dz = A.$$

Die Rechnung wird bis zu einem Punkt  $z_0$  geführt, der innerhalb des Gültigkeitsbereiches des asymptotischen Gesetzes (18) liegt. Die auftretenden Restintegrale können mit Hilfe von (18) berechnet werden. Natürlich

wird durch die Benutzung des asymptotischen Gesetzes (18) ein gewisser Fehler in die Rechnung hineingetragen, der sich nicht durch Iterationen beseitigen läßt. Er wird um so kleiner, je weiter  $z_0$  hinausgeschoben wird und beeinflusst die Lösung im Bereich, der  $z_0$  vorgelagert ist, da sie ja hier sozusagen mit Gewalt zu stetigem Anschluß an den asymptotischen Verlauf gezwungen wird.

Insgesamt wurde die lineare Gleichung viermal integriert für  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . Das Ergebnis der Rechnungen ist in den Abb. 4–10 als breit ausgezogene Kurve eingetragen. Die dortige Auftragung ist allerdings nicht  $\psi$  über  $z$ , sondern  $F(k\lambda)/u^2\lambda$  über  $k\lambda$ , wo gilt:

$$k\lambda = \sqrt{10} z; \quad \frac{F(k\lambda)}{u^2\lambda} = \frac{D}{\kappa^2 R_M \sqrt{10}} \psi.$$

Die damit ermittelte selbsterhaltende Lösung, die zu den Experimenten von STEWART und TOWNSEND gehört, soll später mit den aus dem Anfangswertproblem ermittelten Spektren verglichen werden.

### III. Das Anfangswertproblem

Wir wenden uns nunmehr der allgemeinen Lösung der HEISENBERGSchen Integralgleichung (9) zu.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx \\ & + \left( \kappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx + \nu \right) \int_0^k 2x^2 F(x, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

In bezug auf  $t$  stellt die Integrodifferentialgleichung (9) ein partielles Problem 1. Ordnung dar mit den Charakteristiken  $dt=0$ . Auf einer solchen Charakteristik  $t=t_0$  müssen also Anfangswerte vorgegeben werden:  $F(k, t_0) = F_0(k)$ . Bezüglich  $k$  handelt es sich um eine nichtlineare Integralgleichung mit unbestimmten Integrationsbereichen zwischen  $0 \leq k \leq \infty$ , so daß Randwerte für  $k=0$  und  $k=\infty$  nicht vorgeschrieben werden können. Wie man aus (9) erkennt, fordert die Gleichung hinreichend starkes Verschwinden für  $k \rightarrow 0$  und  $k \rightarrow \infty$ , was natürlich auch von den Anfangswerten verlangt werden muß (s. u.). Die zugehörige partielle Differentialgleichung ist parabolisch ausgeartet und von 3. Ordnung. Sie wurde von TOLLMIE<sup>14</sup> in Form einer Determinante dargestellt.

Ehe wir uns nun der Ermittlung der Anfangswerte zuwenden, wollen wir etwas über das asymptotische

Verhalten der Lösungen von (9) für  $k \rightarrow 0$  und  $k \rightarrow \infty$  bemerken, da dieses auch von den Anfangswerten gefordert werden muß. Für  $k \rightarrow \infty$  hat BASS<sup>20</sup> die Gleichung (9) exakt gelöst für den Fall, daß das Integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx \text{ ersetzt wird durch die zeitliche Änderung der Gesamtenergie:}$$

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty F(k, t) dk.$$

Die Gleichung lautet dann

$$E'(t) + \left( \kappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx + \nu \right) \int_0^k 2x^2 F(x, t) dx = 0 \quad (18)$$

und hat die Lösung

$$F(k, t) = \frac{\kappa^2 E^2}{4 k^7 (\nu^3 - 3 \kappa^2 E' / 8 k^4)^{1/2}}. \quad (19)$$

Man kann vermuten, daß (19) auch eine asymptotische Lösung der Gl. (9) für  $k \rightarrow \infty$  ist. Diese Vermutung ist von TOLLMIE<sup>14</sup> voll bestätigt worden, der (19) mit Hilfe von asymptotischen Näherungsformeln aus der Theorie der LAPLACE-Transformation für große  $k$  gewinnen konnte. Es besteht somit kein Bedenken, (19) als Näherungsformel zu benutzen.

Für  $k \rightarrow 0$  hatten BATCHELOR<sup>19</sup> wie auch LIN allgemein für homogene Turbulenz gezeigt, daß  $F \sim k^4$  sein muß. Diese Potenz ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung. Genauer gilt:

$$F(k, t) = \frac{\Lambda}{3\pi} k^4 + \dots,$$

wobei  $\Lambda$  die LOITSIANSKISCHE Invariante ist.

### IV. Bestimmung der Anfangswerte $F_0(k)$

Wie bereits erwähnt, werden in dieser Arbeit die von STEWART und TOWNSEND<sup>15</sup> durchgeführten Experimente zugrunde gelegt. Die beiden Autoren haben das Abklingen der durch ein quadratisches Gitter erzeugten Turbulenz verfolgt. Die Re-Zahl der gleichförmigen Grundströmung bei diesen Messungen war  $R_M = U M / \nu = 5300$ , die Strömungsgeschwindigkeit  $U = 620$  cm/sec und die Maschenweite des Gitters  $M = 1,27$  cm. In den Abständen  $x/M = 20, 30, 60, 90$  und  $120$  hinter dem Gitter sind die Zwei- und Dreifachkorrelationen der Geschwindigkeit gemessen worden.

<sup>20</sup> J. BASS, C. R. Acad. Sci., Paris **228**, 22 [1949].

Nun kann man mit der Rechnung erst in einem gewissen Abstand hinter dem Gitter beginnen, da der Gl. (9) die Voraussetzungen der statistischen Homogenität und Isotropie des Strömungsfeldes zugrundeliegen. Diese sind aber im Luftstrom direkt hinter dem Gitter keineswegs erfüllt. Zunächst ist unmittelbar hinter dem Gitter die Energie nicht gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt. Hier existieren allerdings auch nur große Wirbel, die sich dann in Kaskaden kleinerer Wirbel aufspalten. Man darf annehmen, daß dieser Prozeß von einer zunehmenden Entkopplung von anfänglichen Unregelmäßigkeiten in der Energieverteilung über die Richtungen begleitet wird. So sind wenigstens die kleinen Wirbel (große Wellenzahlen) isotrop. Die Einwirkung der Druckkräfte (s. BATCHELOR<sup>19</sup>) bewirkt dann einen Ausgleich in der Richtungsverteilung, so daß der Isotropiebereich mit wachsendem  $t$  in Richtung kleiner  $k$  fortschreitet. Die größten Wirbel bleiben aber anisotrop. Allerdings macht sich das erst bemerkbar, wenn sie den Hauptteil der Gesamtenergie liefern, also im Endstadium des Zerfalls. Nach experimentellen Ergebnissen ist die Bedingung  $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2$  angenähert im Abstand  $x/M = 10$  hinter dem Gitter erfüllt. Da dies aber unsicher ist, lassen wir die Rechnung erst im Abstand  $x/M = 30$  hinter dem Gitter beginnen.

Im Abstand  $x/M = 30$  ist die Zweifachkorrelation der Geschwindigkeit durch die Messungen von STEWART und TOWNSEND experimentell gegeben. Die Spektralfunktion  $F(k, t)$  hängt mit der Korrelation  $f(r, t)$  durch die bekannte Formel:

$$F_0(k) = \frac{\overline{u^2}}{\pi} \int_0^\infty k^2 r^2 f(r, t_0) \left( \frac{\sin k r}{k r} - \cos k r \right) dr \quad (20)$$

zusammen. Damit wären also grundsätzlich die Anfangswerte gegeben.

Nun sind aber von  $f(r, t_0)$  nur 9 Meßpunkte bekannt, mit denen allein man das Integral nicht berechnen kann. Zunächst einmal erscheint die Formel (20) zur Berechnung nicht besonders geeignet, weil in ihr die Integralwerte mit  $k^2$  multipliziert werden. Für größere  $k$  muß dies beträchtliche Schwankungen in  $F$  liefern, da die Integralwerte selbst infolge der mangelhaften Information bezüglich  $f$  schwanken. Wir integrieren daher (20) zweimal partiell nach  $r$  und erhalten unter Berücksichtigung von  $f(\infty, t) = 0$ :

$$F_0(k) = \frac{\overline{u^2}}{\pi} \int_0^\infty (3f + 5r f' + r^2 f'') \cos k r dr; \quad (r' = \frac{\partial}{\partial r}).$$

Mit  $k\lambda = x$ ,  $r/\lambda = y$  und  $F_0(k\lambda)/\overline{u^2}\lambda = \Phi_0(x)$  wird daraus

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (3f + 5y f' + y^2 f'') \cos xy dy. \quad (21)$$

Bezüglich des asymptotischen Verhaltens von  $f(r, t)$  für  $r \rightarrow \infty$  schließen wir uns der allgemeinen Auffassung an, die hier ein exponentielles Gesetz vermutet:

$$f(r) \sim e^{-ar} \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Die in (21) auftretende Grundfunktion wird dann asymptotisch durch folgenden Ansatz dargestellt:

$$y \geq y_0; \quad 3f + 5y f' + y^2 f'' = (A + By + Cy^2) e^{-Dy}.$$

Die vier Parameter dienen dazu, folgende Forderungen zu erfüllen:

1. Stetiger Anschluß an die experimentellen Daten bei  $y_0$ .
2. Richtiges asymptotisches Verhalten für  $x \rightarrow 0$ :

$$\Phi_0(x) = \frac{A}{3\pi \overline{u^2} \lambda^5} x^4 + \dots$$

Diese Forderung liefert drei Integralbedingungen. A, B, C, D werden so bestimmt, daß die vier Bedingungen erfüllt sind. Die Größe  $A$  entnehmen wir der Abb. 12 der Arbeit von STEWART und TOWNSEND<sup>15</sup>.

Die berechnete Funktion  $\Phi_0$  hat nun noch zwei Integralbedingungen zu erfüllen, die sich aus allgemeinen Definitionen ergeben. Zunächst folgt aus:

$$\int_0^\infty F(k, t) dk = \frac{3}{2} \overline{u^2} \rightarrow \int_0^\infty \Phi_0(x) dx = \frac{3}{2}.$$

Nach der Definition der TAYLORSchen Dissipationslänge  $\lambda$  gilt (s. etwa v. KÁRMÁN und HOWARTH<sup>3</sup>):

$$\frac{d\overline{u^2}}{dt} = -\frac{10 \nu \overline{u^2}}{\lambda^2} \rightarrow \int_0^\infty x^2 \Phi_0 dx = \frac{15}{2}.$$

Diese Integralbedingungen werden durch Verfügen über das asymptotische Verhalten von  $\Phi_0$  im Sinne von (19) erfüllt.

Mit der so gewonnenen Anfangsverteilung können wir nun die Rechnung aufnehmen; jedoch soll nochmals darauf hingewiesen werden, daß das berechnete  $\Phi_0$  nur als Annäherung an den tatsächlichen Verlauf aufgefaßt werden kann. Als Fehlerquellen kommen in Frage: 1. Meßfehler, 2. Anschluß des asymptotischen Gesetzes, 3. Ausgleichsfehler. Man darf jedoch wegen des parabolischen Charakters des Problems hoffen, daß sich Abweichungen nicht allzu sehr auf den Abklingvorgang auswirken.

## V. Numerische Integration der Heisenbergschen Gleichung

Die numerische Integration der HEISENBERGSchen Gleichung wurde nach einem Verfahren durchgeführt, das von TOLLMIE<sup>14</sup> entwickelt wurde und sich sehr bewährt hat. Zunächst werden dimensionslose Größen



eingeführt mit Hilfe einer Länge  $L$  und der kinematischen Zähigkeit:

$$\tilde{k} = kL; \quad \tilde{t} = \frac{t\nu}{L^2}; \quad \tilde{F} = \frac{FL}{\nu^2},$$

$L$  = Länge, etwa  $L = \lambda_0 = \lambda(t_0)$ .

In den dimensionslosen Größen lautet die Integrodifferentialgleichung (9) (Tilden wieder weggelassen):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx + \left( \kappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx + 1 \right) \cdot \int_0^k 2x^2 F(x, t) dx = 0 \quad (22)$$

mit den Anfangswerten  $F(k, t_0)$ .

Folgende Abkürzungen seien nun eingeführt:

$$\alpha(k, t) = \int_0^k x^2 F(x, t) dx; \quad (23)$$

$$\beta(k, t) = \kappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(x, t)}{x^3}} dx + 1.$$

Differenzieren wir nun (22) einmal partiell nach  $k$  und setzen (23) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2k^2 \beta(k, t) F = \frac{2\kappa \alpha(k, t)}{k^{3/2}} \sqrt{F} \quad (24)$$

oder

$$\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial t} + k^2 \beta(k, t) \sqrt{F} = \frac{\kappa \alpha(k, t)}{k^{3/2}}. \quad (25)$$

Diese Beziehung kann man umformen, wenn man sie als eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für  $\sqrt{F}$  auffaßt. Ihre Integration liefert:

$$\sqrt{F(k, t)} = e^{-k^2 \int_{t_0}^t \beta(k, \tau) d\tau} \left\{ \sqrt{F_0(k)} + \int_{t_0}^t \frac{\kappa \alpha(k, \tau)}{k^{3/2}} e^{k^2 \int_{t_0}^{\tau} \beta(k, \sigma) d\sigma} d\tau \right\}. \quad (26)$$

Diese Formel eignet sich sehr gut für die Iteration, wenn man das Problem nach dem ADAMS-STÖRMERSCHEN Verfahren mit iterativer Verbesserung integriert. Aus (26) ergibt sich für kleine  $t$  die Näherungsformel:

$$\sqrt{F(k, t)} = \sqrt{F_0(k)} e^{-k^2 t \left( \kappa \int_k^\infty \sqrt{F_0(x^3)} dx + 1 \right)} + \kappa \frac{\int_0^k x^2 F_0 dx}{k^{7/2}} \frac{1 - e^{-k^2 t \left( \kappa \int_k^\infty \sqrt{F_0(x^3)} dx + 1 \right)}}{\int_k^\infty \sqrt{F_0(x^3)} dx + 1}, \quad (27)$$

mit deren Hilfe man zunächst zwei Spektren  $F(k, t_1)$  und  $F(k, t_2)$  ermitteln kann ( $t_1 < t_2 \approx 0$ ), die dann iterativ mit (26) verbessert werden können. Sind diese Anfangswerte berechnet, so läuft der Integrationsprozeß nach folgendem Schema:

1. Schritt: Quadratische Extrapolation:

$$F^{(1)}(k, t_\nu) = F(k, t_{\nu-3}) - 3F(k, t_{\nu-2}) + 3F(k, t_{\nu-1}); \quad \nu = 3, 4, 5 \dots$$

Man erhält so eine erste Näherung  $F^{(1)}(k, t_\nu)$ . Die weiteren Näherungen erhält man aus dem zweiten Schritt:

2. Schritt: Iterative Verbesserung:

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$B(k, t) = \int_{t_0}^t \beta(k, \tau) d\tau; \quad A(k, t) = \frac{\kappa \alpha(k, t)}{k^{3/2}} e^{-k^2 B(k, t)}; \quad C(k, t) = \int_{t_0}^t A(k, \tau) d\tau,$$

$$B^{(n-1)}(k, t_\nu) = \int_{t_0}^{t_{\nu-2}} \beta(k, \tau) d\tau + \frac{4\Delta t}{3} (\beta(k, t_{\nu-2}) + 4\beta(k, t_{\nu-1}) + \beta^{(n-1)}(k, t_\nu)),$$

$$C^{(n-1)}(k, t_\nu) = \int_{t_0}^{t_{\nu-2}} A(k, \tau) d\tau + \frac{4\Delta t}{3} (A(k, t_{\nu-2}) + 4A(k, t_{\nu-1}) + A^{(n-1)}(k, t_\nu)).$$

Die allgemeine Iterationsformel lautet dann:

$$F^{(n)}(k, t_\nu) = e^{-2k^2 B^{(n-1)}(k, t_\nu)} \left\{ \sqrt{F_0(k)} + C^{(n-1)}(k, t_\nu) \right\}; \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

$A^{(n-1)}(k, t)$  und  $\beta^{(n-1)}(k, t)$  sind jeweils mit der letzten Näherung zu berechnen. Das Verfahren liefert im allgemeinen stehende Werte nach zwei Iterationen pro Zeitschritt. Zu Beginn der Rechnung muß man die Zeitschritte  $\Delta t$  sehr klein wählen, kann aber späterhin immer größere Schritte machen.

Der asymptotische Teil geht nur über  $\beta(k, t)$  in die Rechnung ein. Erstreckt man die Rechnung bis  $k_0$ , so wird das Restintegral approximiert durch:

$$\beta(k_0, t) = \kappa \int_{k_0}^{\infty} \sqrt{\frac{F}{x^3}} dx + 1 \approx \frac{\kappa}{4} \sqrt{\frac{F(k_0)}{k_0}} + 1,$$

wenn man die Spektren bis  $k_0$  numerisch integriert, wo  $k_0$  so groß, daß  $F = \text{const} \cdot k^{-7}$ .

Die Rechnung wurde für drei verschiedene  $\kappa$ -Werte durchgeführt, nämlich  $\kappa = 0,47$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\kappa = 1,4$ , und zwar jeweils in einem  $t$ -Bereich, der einem Gitterabstand von  $x/M = 30$  bis  $x/M = 130$  entspricht. Für  $\kappa = 0$  reduziert sich (22) einfach auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(x, t) dx + 2 \int_0^k x^2 F(x, t) dx = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + 2k^2 F = 0, \quad F(k, t_0) = F_0(k)$$

mit der Lösung  $F(k, t) = F_0(k) e^{-2k^2(t-t_0)}$ .

Die berechneten Spektren für  $x/M = 30, 45, 60, 90, 120$  sind in den Abb. 4–10 aufgetragen, und zwar  $F(k\lambda)/\bar{u}^2\lambda$  über  $k\lambda$ . Auf die zu  $\kappa = 1,4$  gehörigen Spektren wurde verzichtet, da sie keinerlei physikalische Bedeutung besitzen. Abb. 2 und 3 zeigen das Abklingen der reziproken Gesamtenergie hinter dem Gitter. Das Ergebnis der Rechnung wird in den folgenden Abschnitten diskutiert werden.

## VI. Das Abklingen der Gesamtenergie

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß das Verhalten der Gesamtenergie hinter dem Gitter vorzüglich durch das reziprok lineare Gesetz (15) beschrieben wird. Allerdings gilt dieses Gesetz nur in einem gewissen Bereich hinter dem Gitter, den man auch als Anfangsperiode bezeichnet. Daran schließt sich ein Gebiet mit stärkerem Abklingen der Gesamtenergie an. Das reziprok lineare Gesetz wurde durch zahlreiche Messungen immer wieder bestätigt. So führten BATCHELOR und TOWNSEND<sup>16</sup>, STEWART und TOWNSEND<sup>15</sup> Meßreihen für verschiedene turbulenz-erzeugende Gitter bei verschiedenen Re-Zahlen durch.

Es wurden Gitter mit zylindrischen Stäben, einfach und gekreuzt, benutzt. In jedem Fall bestätigten die Meßergebnisse das Gesetz (15). Dabei ergab sich ferner, daß die Konstante  $D$  im wesentlichen von der geometrischen Form des Gitters abhängt, während sie sich nur unwesentlich mit der Re-Zahl ändert. Der Wert von  $x_0$  ändert sich ebenfalls etwas mit der Anordnung und der Re-Zahl. Nur sehr spärliche Angaben lassen sich jedoch über den Gültigkeitsbereich von (15) machen. Es scheint, als ob sich auch dieser mit der Re-Zahl ändert: Bei den Messungen von BATCHELOR und TOWNSEND von  $x/M = 100$  bis  $x/M = 200$  für  $R_M = 0,28 \cdot 10^4$  bis  $0,56 \cdot 10^4$ . Es liegt somit der Gedanke nahe, daß (15) allgemein für den Zerfall direkt hinter dem Gitter gilt.

Wollen wir also zu einer adäquaten Beschreibung des Abklingvorgangs gelangen, so müssen wir die Erfüllung von (15) in unser Programm aufnehmen. Dazu formulieren wir das Gesetz zunächst etwas anders, damit es in die bisherige Schreibweise hineinpaßt. Im Anfangspunkt  $t_0$  können wir zwei Parameter vorgeben:  $u_0^2$  und  $\lambda_0$ , dank der Tatsache, daß die Anfangsverteilung  $F_0(k)$  die beiden Integralbedingungen  $\int_0^\infty \Phi_0 dx = 3/2$  und  $\int_0^\infty x^2 \Phi_0 dx = 15/2$  erfüllt.

$$\text{Da} \quad \frac{3}{2} \overline{u_0^2} = E_0 = \int_0^\infty F_0(k) dk;$$

$$\lambda_0^2 = 5 \frac{\int_0^\infty F_0(k) dk}{\int_0^\infty k^2 F_0(k) dk} = 10 \nu \frac{E_0}{-E_0'},$$

können wir statt dessen auch  $E_0 = E(t_0)$  und  $E_0' = E'(t_0)$  vorgeben. Diese beiden Größen können in jedem Fall der Strömung von außen aufgeprägt werden. Nimmt man an, daß (15) gilt, so folgt, daß das Anfangswertproblem bezüglich  $E(t)$  nur von 2. Ordnung ist, wie auch aus der Darstellung

$$E(t) = \frac{E_0^2}{E_0 - E_0'(t - t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (28)$$

zu ersehen ist. Die Integrodifferentialgleichung (9) stellt, mathematisch gesehen, eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung für die Energiefunktion  $E(t)$  dar. Sämtliche Ableitungen von  $E(t)$  in  $t_0$  lassen sich dementsprechend auch durch  $F_0(k)$

ausdrücken:

$$\begin{aligned} E(t_0) &= \int_0^\infty F_0(k) dk, \\ E'(t_0) &= -2\nu \int_0^\infty k^2 F_0(k) dk, \\ &\dots\dots\dots \\ E^{(n)}(t_0) &= -2\nu \int_0^\infty \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} \Big|_{t=t_0} k^2 dk. \end{aligned} \quad (29)$$

Dabei ist  $\partial F_0 / \partial t$  mit (9) wiederum durch  $F_0$  auszudrücken. (15) bedeutet nur, daß sich die Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung für  $E(t)$ , die durch (9) gegeben wird, und die formal so geschrieben sei:

$$H(E(t), E'(t), \dots, E^{(n)}(t), \dots) = 0,$$

reduziert auf

$$E(t) E''(t) - 2 E'^2(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} E(t_0) &= E_0, \\ E'(t_0) &= E'_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Entwickelt man (28) nach Potenzen von  $(t - t_0)$ , so erhält man durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{d^n E}{dt^n} \Big|_{t=t_0} = n! E_0 \left( \frac{E'_0}{E_0} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

Soll also (28) gelten, so muß die Anfangsverteilung  $F_0$ , die sich aus (29) und (31) ergebenden Integralbedingungen erfüllen. Durch die Vorgabe von  $E(t)$  durch (28) ist also  $F_0$  bestimmt. Im Falle  $\kappa = 0$  reduziert sich das resultierende Gleichungssystem auf ein normales, lineares Momentenproblem:

$$\frac{d^n E}{dt^n} \Big|_{t=t_0} = (-2\nu)^n \int_0^\infty k^{2n} F_0(k) dk. \quad (32)$$

Man kann zeigen<sup>21</sup>, daß dieses System eindeutig gelöst wird durch:

$$F_0(k) = \frac{2\nu E_0^2}{-E'_0} k e^{-(2\nu E_0 / -E'_0) k^2}, \quad (33)$$

was der ähnlichen Lösung

$$\Phi(\chi) = 6\chi e^{-2\chi^2} \quad (34)$$

entspricht, die sich aus (14) für  $\kappa = 0$  ergibt. Es ist damit bewiesen, daß es im Falle  $\kappa = 0$  eine und nur eine Anfangsverteilung gibt, die ein reziprok lineares Gesetz für das Abklingen der Gesamtenergie liefert, nämlich die ähnliche.

Für  $\kappa > 0$  ist das Gleichungssystem (29) zu lösen. Hierbei handelt es sich nicht mehr um ein Momentenproblem im eigentlichen Sinn, sondern um die Lösung eines Gleichungssystems von der Art

$$\frac{d^n E}{dt^n} \Big|_{t=t_0} = \int_0^\infty G_n(\kappa, \nu, F_0(k), k) dk, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

$$\text{wobei} \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} G_n = (-2\nu)^n k^{2n} F_0(k).$$

Auch dieses Problem besitzt im reziprok linearen Fall eine Lösung, nämlich die ähnliche. Ob allerdings hier wie im Falle  $\kappa = 0$  Eindeutigkeit vorliegt, kann nicht entschieden werden.

Nun ist bekannt, daß (15b) das Verhalten der Gesamtenergie nur im Anfangsstadium des Zerfalls richtig wiedergibt, späterhin aber Abweichungen vom reziprok linearen Gesetz auftreten, die zum asymptotischen Verhalten überleiten, auf das wir noch zu sprechen kommen. Wir gelangen so zu folgender Fragestellung: Durch experimentelle Untersuchungen haben wir eine relativ sichere Kenntnis vom Verhalten der Gesamtenergie hinter dem Gitter, d. h. die Funktion  $E(t)$  ist für  $t \geq t_0$  vorgegeben. Wollen wir erreichen, daß die Lösung  $F(k, t)$  von (9) dieses Gesetz richtig wiedergibt, so müssen wir  $F_0(k)$  als Lösung von (35) gewinnen. Wir geben dann die Anfangsverteilung nicht mehr direkt vor, sondern statt dessen  $E(t)$ , das mit  $F_0$  über (29) zusammenhängt. Wir wissen: Ist  $E(t)$  reziprok linear, so wird eine Lösung des Problems durch die ähnliche Lösung gegeben. Wie verändert sich nun diese Lösung, wenn man etwa ein quadratisches Abweichen vom reziprok linearen Gesetz in Rechnung stellt, also etwa folgende Form annimmt:

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E_0} - \frac{E'_0}{E_0^2} (t - t_0) + \frac{\alpha}{E_0} (t - t_0)^2. \quad (36)$$

Dabei kann angenommen werden, daß:  $0 < \alpha \ll 1$ , da das quadratische Glied erst in großer Entfernung hinter dem Gitter wirksam wird. Das aus (35) und (36) resultierende Gleichungssystem kann im Falle  $\kappa = 0$  durch Linearisierung approximativ gelöst werden und liefert das in Abb. 1 veranschaulichte Abweichen von der ähnlichen Lösung<sup>21</sup>.

Diese Abweichung ist auch physikalisch leicht zu deuten. Wäre die Anfangsverteilung ähnlich, so gälte das reziprok lineare Gesetz für alle Zeiten. Damit eine positive Abweichung von diesem Gesetz auftritt, muß ein gewisser Teil der Gesamtenergie aus dem Gleichgewichtsbereich entnommen werden, und zwar so, daß

<sup>21</sup> K. MEETZ, Dissertation, Göttingen 1955.

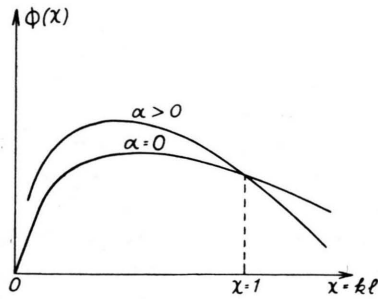


Abb. 1.

$$E_0 = \int_0^\infty F_0(k) dk \quad \text{und} \quad E_0' = -2\nu \int_0^\infty k^2 F_0(k) dk$$

ungeändert bleiben, was eben durch die ermittelte Art der Abweichung erreicht wird. Tatsächlich verhält sich auch die berechnete Anfangsverteilung so gegenüber der ähnlichen Lösung (s. Abb. 6).

Wir könnten also grundsätzlich die richtige Anfangsverteilung  $F_0(k)$ , die zu einem vorgegebenen Abklinggesetz führt, aus dem Gleichungssystem (35) ermitteln. Damit wäre die Unbestimmtheit der Anfangswerte auf das Abklinggesetz zurückgeführt, das zuverlässig bekannt ist. Doch leider ist das Austauschglied  $H(k, t)$  durch den HEISENBERGSchen Ansatz nur bis auf die Konstante  $\alpha$  bestimmt, so daß wir eine einparametrische Schar von Anfangsverteilungen erhielten, wenn wir  $\alpha$  variierten. Der Wert von  $\alpha$  wäre dann durch Vergleich der Lösungsschar mit unserer aus den Experimenten ermittelten Anfangsverteilung zu bestimmen. Da eine Lösung von (35) hoffnungslos erscheint, entscheiden wir uns für die zweite Möglichkeit, die wesentlich einfacher durchzuführen ist, jedoch mit dem oben geschilderten Verfahren äquivalent ist: Wir benutzen die aus dem Experiment berechnete Anfangsverteilung und vergleichen die Abklinggesetze, die sich für verschiedene Werte von  $\alpha$  ergeben, mit dem gemessenen Abklinggesetz.

Ehe wir auf das Ergebnis der Rechnung zu sprechen kommen, wollen wir kurz das asymptotische Verhalten der Gesamtenergie für  $t \rightarrow \infty$  erörtern. Folgende Voraussetzungen mögen erfüllt sein: 1.  $t$  soll so groß sein, daß in den NAVIER-STOKESSchen Gleichungen die Trägheitsglieder gegenüber den Reibungsgliedern vernachlässigt werden können. Dann wird aus der HEISENBERGSchen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 2\nu k^2 F = 0 \quad (37)$$

mit der Lösung

$$F(k, t) = F(k, t^*) e^{-2\nu k^2(t-t^*)}, \quad (38)$$

wobei  $t^*$  die obige Forderung erfüllt. 2.  $t$  soll so groß gegen  $t^*$  sein, daß die Entwicklung von (38) nach dem ersten Gliede abgebrochen werden kann. Für  $t \gg t^*$  wird dann nach (13) das asymptotische Verhalten von  $F$  dargestellt durch:

$$F(k, t) = \frac{A}{3\pi} k^4 e^{-2\nu k^2(t-t^*)}, \quad t \gg t^*, \quad (39)$$

und für  $E(t)$  ergibt sich

$$E(t) = \frac{A}{6\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{[2\nu(t-t^*)]^{5/2}}, \quad t \gg t^*. \quad (40)$$

Der Gültigkeitsbereich dieses bekannten  $t^{-5/2}$ -Gesetzes wird durch  $x^* = U t^*$  bestimmt. Wenn man  $\alpha$  als Variable auffaßt, so ändert sich  $x^*$  mit  $\alpha$  und  $R_M$ , und zwar ist  $x^*$  um so kleiner, je kleiner die Re-Zahl und je größer  $\alpha$  ist. Letzteres folgt daraus, daß Vergrößerung von  $\alpha$  eine Beschleunigung des Abklingvorgangs bedeutet. BATCHELOR und TOWNSEND<sup>16</sup> haben denn auch für kleine Re-Zahlen ( $R_M = 650$ ) das asymptotische Gesetz verifizieren können und gelangten zu dem Ergebnis, daß in diesem Fall  $x^*/M \approx 500$  ist. Da bei den in dieser Arbeit zugrunde gelegten Experimenten  $R_M = 5300$  ist, dürfte auch  $x^*$  wesentlich größer sein, so daß es hoffnungslos erscheint, bei der Integration von (9) bis in den Gültigkeitsbereich von (40) vorstoßen zu können.

In Durchführung des geschilderten Programms wurde die Integrodifferentialgleichung (9) für vier verschiedene Werte von  $\alpha$  integriert, nämlich  $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 0,47$ ;  $\alpha = 0,75$ ;  $\alpha = 1,4$ . Die entsprechenden Abklingkurven für die Gesamtenergie sind in den

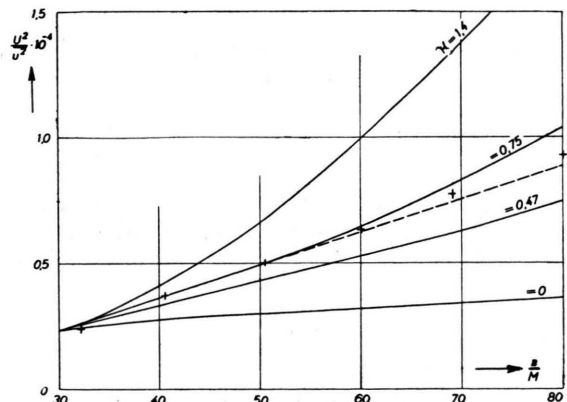


Abb. 2. Abklingen der Gesamtenergie hinter dem turbulenz-erzeugenden, quadratischen Gitter für verschiedene Werte des Parameters  $\alpha$ . — — — Aus Messungen von BATCHELOR und TOWNSEND ermittelte Gerade. +: Entfernung vom Gitter,  $M$ : Maschenweite. +: Meßpunkte von BATCHELOR und TOWNSEND<sup>16</sup>.  $U = 643$  cm/sec,  $R_M = 5500$ .



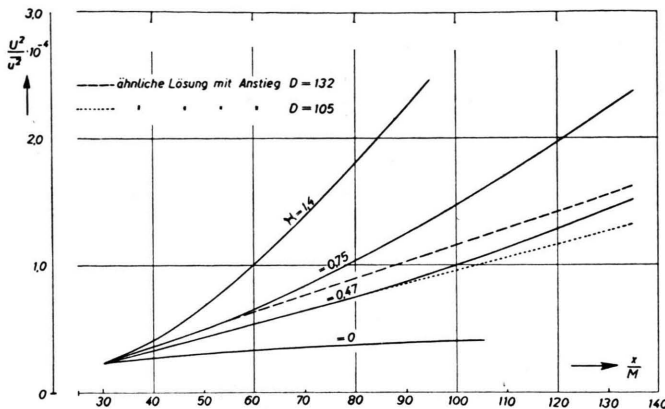


Abb. 3. Abklingen der reziproken Gesamtenergie für verschiedene Werte von  $\alpha$ .

Abb. 2 und 3 aufgetragen. Für  $\alpha=0,75$  ergibt sich nun in der Tat ein Abklinggesetz, das zunächst reziprok linear mit dem von BACHELOR und TOWNSEND<sup>16</sup> gemessenen Anstieg  $D=132$  verläuft und bei  $x/M=60$  von diesem abweicht. Bei den erwähnten Messungen beginnt die Abweichung allerdings erst bei  $x/M=80$  (s. Abb. 2). Doch sind sie bei einer größeren Re-Zahl durchgeführt ( $R_M=5500$ ), so daß der Abweichungspunkt nach den obigen Überlegungen früher liegen muß. Der Anstieg  $D$  hängt dagegen kaum von der Re-Zahl ab und dürfte hier der gleiche sein wie in den Messungen. Auch im Falle  $\alpha=0,47$  ergibt sich ein reziprok linearer Bereich, der bis  $x/M=90$  reicht (s. Abb. 3). Der Anstieg beträgt hier nur  $D=105$ . Wie wir gesehen haben, bedeutet kleineres  $\alpha$ , integral gesehen, größere Re-Zahl und damit späteres Abweichen. Natürlich ergibt sich hier direkt bei  $x=x_0$  ein Einschwenken auf den Anstieg  $D=105$ , da die Anfangstangente

$$E_0' = -2\nu \int_0^\infty k^2 F_0 dk$$

von  $\alpha$  unabhängig ist. Halten wir fest, daß sich für  $\alpha=0,75$  ein im wesentlichen richtiges Abklinggesetz ergibt, während sich für  $\alpha=0,47$  ein im weiten Bereich reziprok lineares Gesetz einstellt, das jedoch einen zu geringen Anstieg aufweist.

## VII. Gleichgewicht und Ähnlichkeit

An Hand eines einfachen Modells kann man sich leicht eine Gleichung für die Änderung der Energie einer bestimmten Wirbelgröße aufstellen. Das Verhalten der kinetischen Energie pro Wellenzahleinheit

wird durch zwei konträre Einflüsse bestimmt: 1. Durch die Einwirkung der Zähigkeit wird kinetische Energie in thermische umgesetzt, und zwar um so mehr, je größer die Wellenzahl ist. 2. Die Trägheitsglieder verteilen Energie über einen möglichst großen Wellenzahlbereich. Beide Tendenzen zusammengefaßt, erzeugen also einen Energiestrom von kleinen zu großen Wellenzahlen, da hier ja die Energie am schnellsten umgesetzt wird. Die Wirbelenergie der Größenklasse  $1/k$  ändert sich damit infolge dreier verschiedener Effekte: 1. Die Energie  $\varepsilon_-$  wird pro Zeit- und Wellenzahleinheit an kleinere Wirbel abgegeben. 2.  $\varepsilon_+$  wird von größeren Wirbeln aufgenommen. 3.  $q=2\nu k^2 F(k,t)$  wird in thermische Energie umgesetzt. Also:

$$\partial F / \partial t = \varepsilon_+ - \varepsilon_- - q = \varepsilon_+ - \varepsilon_- - 2\nu k^2 F. \quad (41)$$

Ist  $W(k,k',t)$  die prozentuale Energie, die pro Zeit- und Wellenzahleinheit von  $k$  nach  $k'$  übergeht, wo  $k < k'$  sein muß, so ist

$$\varepsilon_+ = \int_0^k W(k',k;t) F(k',t) dk';$$

$$\varepsilon_- = F(k,t) \int_k^\infty W(k,k';t) dk'.$$

(41) lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & -F(k,t) \int_k^\infty W(k,k';t) dk' \\ & + \int_0^k W(k',k;t) F(k',t) dk' - 2\nu k^2 F. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{Setzt man } W(k,k';t) = 2\alpha k^2 \sqrt{\frac{F(k',t)}{k'^3}}, \quad (43)$$

so folgt daraus die HEISENBERGSche Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & -F(k,t) \int_k^\infty 2\alpha k^2 \sqrt{\frac{F(k',t)}{k'^3}} dk' \\ & + \int_0^k 2\alpha k'^2 \sqrt{\frac{F(k,t)}{k^3}} F(k',t) dk' - 2\nu k^2 F. \end{aligned} \quad (44)$$

Man entnimmt aus (43), daß von kleinen  $k$  aus keine Übergänge erfolgen. Das Maximum von  $(F/k^3)^{1/2}$  liegt vor dem Maximum von  $F$ , so daß der Ansatz (43) für  $k > k_{\max}[F_{\max}=F(k_{\max})]$  besagt, daß Wirbel der Größe  $1/k$  ihre Energie bevorzugt an die benachbarten Wirbelgrößen abgeben.

Wir wollen uns nun den theoretisch möglichen Gleichgewichtszuständen zuwenden. (42) ist eine

Gleichung für die Änderung eines Nicht-Gleichgewichtszustandes, wobei der Zustand hier durch  $F(k, t)$  beschrieben wird. Ein absoluter Gleichgewichtszustand ist dann charakterisiert durch  $\partial F / \partial t = 0$ . Aus (42) wird nach einigen Umformungen

$$0 = 2 \nu k^2 F + \frac{d}{dk} \int_0^k dk' F(k') \int_k^\infty W(k', k'') dk'' . \quad (45)$$

Hieraus folgt durch Integration

$$A = 2 \nu \int_0^k k'^2 F(k') dk' + \int_0^k dk' F(k') \int_k^\infty W(k', k'') dk'' . \quad (46)$$

Die Konstante  $A$  läßt sich leicht bestimmen durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$ :

$$A = 2 \nu \int_0^\infty k^2 F(k) dk = \varepsilon ,$$

wo  $\varepsilon$  der Betrag für die Änderung der Gesamtenergie in der Zeiteinheit ist. Der durch (46) charakterisierte Gleichgewichtszustand hängt von den beiden externen Parametern  $\varepsilon$  und  $\nu$  ab. Mit (41) bedeutet er

$$\varepsilon_+ - \varepsilon_- = q .$$

Das Gleichgewicht wird gehalten zwischen Energieumsetzung in Wärme  $q$  und Energiezustrom  $\varepsilon_+ - \varepsilon_-$ . Nur genügend kleine Wirbel können am Gleichgewicht teilnehmen, da nur ihnen Energie zuströmt. Setzen wir (43) in (46) ein, so erhalten wir

$$\varepsilon = \left( \nu \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k')}{k'^3}} dk' + \nu \right) \int_0^k 2 k'^2 F(k') dk' . \quad (47)$$

Mit den Parametern  $\varepsilon$  und  $\nu$  kann man eine Länge und eine Geschwindigkeit bilden:

$$l = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}; \quad V = (\nu \varepsilon)^{1/4} .$$

Sei dann

$$k l = x; \quad F(k) = V^2 l \psi(x) ,$$

so folgt aus (47)

$$1 = \left( \nu \int_k^\infty \sqrt{\frac{\psi(x')}{x'^3}} dx' + 1 \right) \int_0^x 2 x'^2 \psi(x') dx' . \quad (48)$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\psi(x) = \frac{x^2}{4 x^7 (1 + 3 x^2 / 8 x^4)^{4/3}} , \quad (49)$$

wie durch Vergleich mit (19) folgt. Das durch (49) beschriebene Gleichgewicht ist universell und hängt nur von den externen Parametern  $\varepsilon$  und  $\nu$  ab.  $\varepsilon$  ist die kinetische Energie, die pro Zeiteinheit in den Gleichgewichtsraum eintritt und in diesem in thermische Energie umgesetzt wird. (49) beschreibt das asymptotische Verhalten von  $F(k, t)$ . Daß  $F(k) \sim k^{-7}$ , ist ausschließlich eine Folge des HEISENBERGSchen Ansatzes (43) für die prozentuale Übergangsenergie  $W(k, k', t)$  in der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung (46), die in dimensionsloser Form lautet

$$1 = 2 \int_0^x x'^2 \psi(x') dx' + \int_0^x dx' \psi(x') \int_x^\infty W(x', x'') dx'' . \quad (50)$$

Das absolute Gleichgewicht kann sich nur im asymptotischen Teil des Spektrums einstellen.

Daran schließt sich in Richtung kleinerer Wellenzahlen ein Gebiet an, in dem  $\partial F / \partial t \neq 0$ , bis das Spektrum schließlich in den  $k^4$ -Bereich einmündet, der bekanntlich nicht am Austausch beteiligt ist. Hier fehlt der konträre Einfluß völlig, der der Reibung das Gleichgewicht hält. Dieser von jeder Art Gleichgewicht ausgeschlossene Bereich möge unterhalb  $k_0$  liegen. Oberhalb  $k_1$  möge absolutes Gleichgewicht herrschen. Dann ist der dazwischen liegende Bereich nach den experimentellen Ergebnissen charakterisiert durch

$$\int_{k_0}^{k_1} F(k, t) dk \sim 1/t . \quad (51)$$

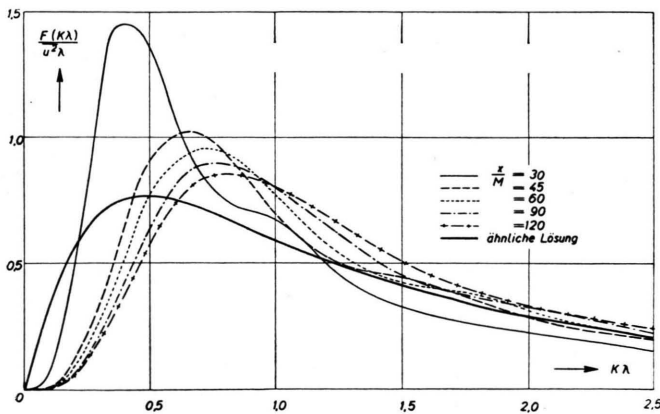


Abb. 4. Vergleich der berechneten Spektren für  $\nu = 0,75$ .

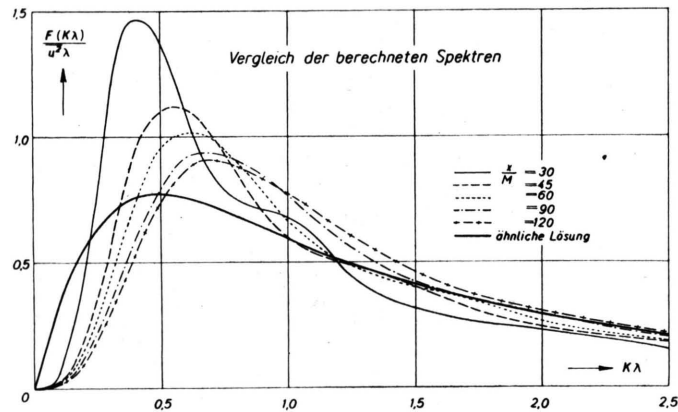


Abb. 5. Vergleich der mit  $\kappa=0,47$  berechneten Spektren.

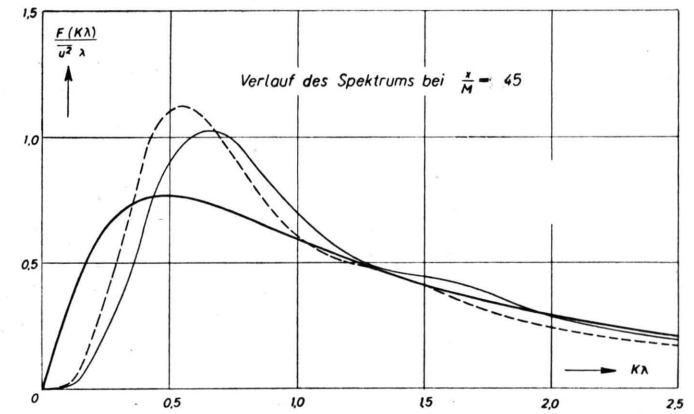


Abb. 7. Verlauf des Spektrums bei  $x/M=45$ .  
 —  $\kappa=0,47$ , - -  $\kappa=0,75$ ,  
 — ähnliche Lösung.

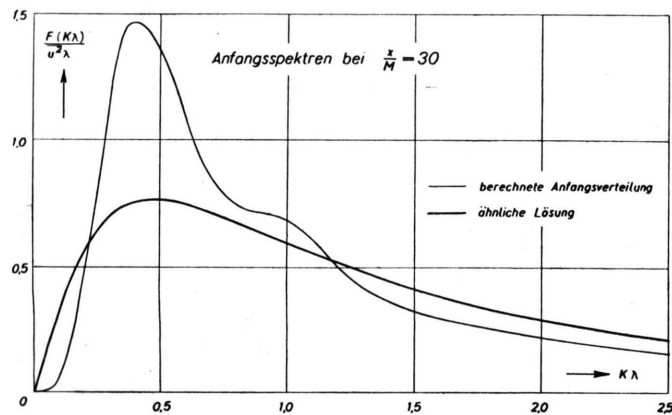


Abb. 6.

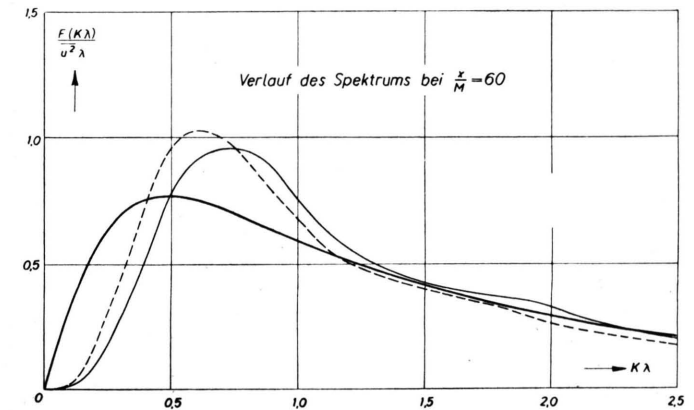


Abb. 8. Verlauf des Spektrums bei  $x/M=60$ .  
 —  $\kappa=0,47$ , - -  $\kappa=0,75$ ,  
 — ähnliche Lösung.

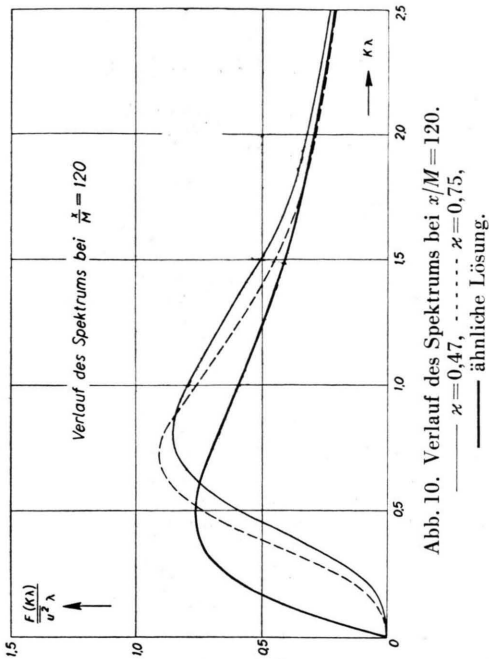


Abb. 10. Verlauf des Spektrums bei  $x/M = 120$ .  
 $\text{---}$   $\zeta = 0.47$ ,  $\text{- - -}$   $\zeta = 0.75$ ,  
 $\text{- . -}$  ähnliche Lösung.

Diese Forderung definiert einen Quasigleichgewichtsbereich, in dem das Gleichgewicht durch die Parameter  $l$ ,  $V$  und  $t$  beschrieben wird. Das Spektrum kann dann gemäß (8) angesetzt werden, und die allgemeine Gleichung für das Quasigleichgewicht lautet [s. (14)]:

$$\frac{1}{2} x \psi(x) - \int_0^x \psi(x') dx' = R \int_0^x dx' \psi(x') \int_x^\infty W(x', x'') dx'', \quad (52)$$

wo  $kl = x$ ;  $F(k, t) = V^2 l \psi(kl)$ ;  $R = V l / V = \text{const.}$

Die Lösung von (5), das sogenannte „selbsterhaltende“ Spektrum, mündet asymptotisch in (49), das absolute Gleichgewicht, ein. Ein Spektrum zerfällt also in drei Bereiche (Abb. 11):

1. Absolutes Gleichgewicht:  $\partial F / \partial t = 0$ ;  $k \geq k_1$ .
2. Quasigleichgewicht:  $k_0 \leq k \leq k_1$ .
3. Kein Gleichgewicht: Große Wirbel  $0 \leq k \leq k_0$ .

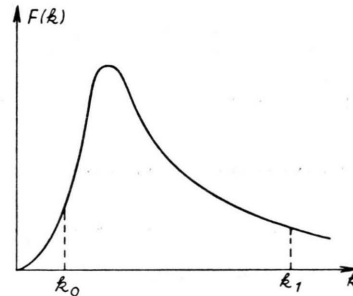


Abb. 11.

Die Abb. 4 bis 10 zeigen das Verhalten des Spektrums im Bereich 3 und im Übergangsbereich von 3 nach 2. Man erkennt, daß gegen Ende des Intervalls, für  $k\lambda > 2$  sich fast schon ein Quasigleichgewicht eingestellt hat. Im Anfang ergeben sich natürlich starke Abweichungen von der ähnlichen Lösung, die ja hier linear geht, während die allgemeinen Spektren sich  $\sim (\lambda k)^4$  verhalten.

Wir vermögen nun leicht einzusehen, worauf die Abweichung vom reziprok linearen Gesetz beruht. Im Laufe des Zerfallsprozesses fließt die Energie infolge des Austauschvorganges aus dem Bereich 2 in den Bereich 1, wo sie in thermische Energie umgesetzt wird. Im Bereich 3 ändert sich dagegen die Energie nur infolge der Reibung, deren Einfluß hier äußerst gering ist  $[2\nu k^2 F(k, t)]$ . Der prozentuale Anteil von 3 an der Gesamtenergie wird immer größer und schließlich für den Verlauf des Abklinggesetzes bestimmend: Es gilt dann das  $t^{-5/2}$ -Gesetz.

Ich danke Herrn Professor Dr. W. TOLLMIEN für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für viele wertvolle Diskussionen des Problems. Herrn Professor Dr. L. BIERMANN danke ich für die Möglichkeit der Benutzung der elektronischen Rechenmaschine G 1, die mir die Durchführung der Rechnungen wesentlich erleichtert hat.

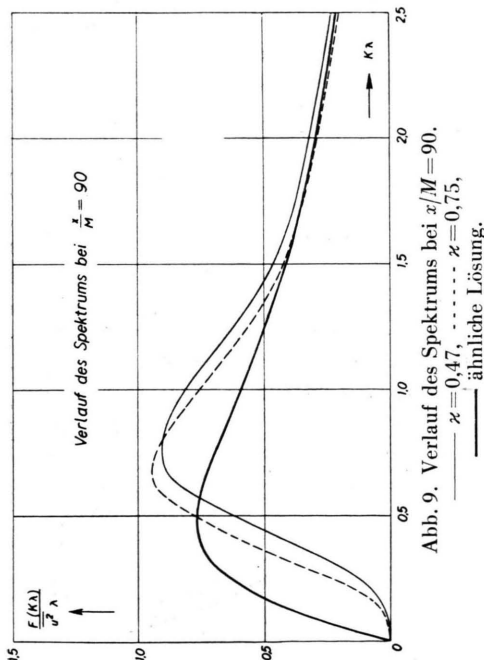


Abb. 9. Verlauf des Spektrums bei  $x/M = 90$ .  
 $\text{---}$   $\zeta = 0.47$ ,  $\text{- - -}$   $\zeta = 0.75$ ,  
 $\text{- . -}$  ähnliche Lösung.